

Die Stufenversetzung im elastisch isotropen Halbraum

Von Wolfgang PFEIFFER

Rice University, Department of Mechanical Engineering, Houston, Texas, USA

(Z. Naturforsch. **19 a**, 294–300 [1964]; eingegangen am 18. Oktober 1963)

The elastic displacement functions of dislocations in limited bodies are of increasing interest with regard to the computation of the electron-microscopic contrast. This paper deals with straight dislocations running parallel to the surface of a semi-infinite region of elastically isotropic material. The linear theory of elasticity is employed. The use of complex functions makes it possible to calculate in closed form the displacement functions of dislocations with various orientations of the BURGERS vector. The symmetries of the displacement functions in infinite and semi-infinite regions are compared. The electron diffraction contrast of dislocations in finite bodies is treated briefly.

Zur Berechnung des elektronenmikroskopischen Kontrastes einer Versetzung benötigt man nach HIRSCH, HOWIE und WHELAN¹ das elastische Verschiebungsfeld dieser Fehlstelle. Da elektronenmikroskopisch durchstrahlbare Folien sehr dünn sind, gewinnt das Problem des Verschiebungsfeldes in begrenzten Körpern an unmittelbarem Interesse. In den folgenden Abschnitten soll vor allem das Verschiebungsfeld einer Stufenversetzung in einem Halbraum behandelt werden. In Abschnitt 6 werden wir etwas ausführlicher auf den Elektronenbeugungskontrast in begrenzten Körpern eingehen.

Die heute als Stufenversetzung bezeichnete Gitterfehilstelle wurde im Jahre 1934 in drei berühmt gewordenen Arbeiten^{2–4} zur Erklärung der Kristallplastizität eingeführt. Bereits TAYLOR⁴ erkannte den engen Zusammenhang zwischen Kristallversetzungen und VOLTERRASchen⁵ Distorsionen, die auf einem kontinuumsmechanischen Konzept beruhen. In den folgenden Jahren wurden Versetzungen häufig mit den Methoden der Elastizitätstheorie kontinuierlicher Körper behandelt⁶. Allerdings stellte sich stets heraus, daß die Stufenversetzung sehr schwer zu behandeln ist, wenn man von recht allgemeinen Voraussetzungen ausgeht.

Für die folgenden Ausführungen werden wir das Problem einschneidend vereinfachen. Wir werden nur *geradlinige* Stufenversetzungen betrachten und nur die *lineare* Elastizitätstheorie für elastisch iso-

trope Medien anwenden. Unter diesen Voraussetzungen sind Stufenversetzungen ebene Verzerrungszustände, so daß die AIRYSche Spannungsfunktion sowie die Methode der komplexen Funktionen angewandt werden können.

Für diesen Fall sind die elastischen Verschiebungen und Spannungen wiederholt berechnet worden^{10–12}. Naturgemäß sind Versetzungen in *unendlich* ausgedehnten Körpern am einfachsten zu behandeln. Deshalb liegen für diesen Fall auch ziemlich vollständige Resultate vor. Bei *endlichen* Körpern hat man die Randbedingungen zu erfüllen: Bei Abwesenheit äußerer Kräfte müssen die inneren Spannungen so beschaffen sein, daß die Oberfläche des Körpers kräftefrei bleibt. Schon bei verhältnismäßig einfach gestalteten Körpern ist es mathematisch sehr schwierig, diese Forderung zu erfüllen. Es gibt jedoch einige Arbeiten über dieses Problem. KOEHLER¹¹ behandelte die Versetzung im Kreiszylinder. ESHELBY und STROH¹³ berechneten Spannungsfeld und Verschiebungsfeld von Versetzungen, welche die Oberfläche einer Platte senkrecht durchstoßen. Mrs. YOFFE¹⁴ betrachtete Versetzungen, die die Oberfläche schräg durchstoßen. Außerdem hat STEKETEE¹⁵ eine allgemeine mathematische Diskussion der VOLTERRASchen Versetzung im Halbraum gegeben.

Wir stützen uns hier vor allem auf eine nur teilweise veröffentlichte Arbeit von DIETZE und LEIB-

¹ P. B. HIRSCH, A. HOWIE u. M. J. WHELAN, Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. A **252**, 499 [1960].

² E. OROWAN, Z. Phys. **89**, 634 [1934].

³ M. POLANYI, Z. Phys. **89**, 660 [1934].

⁴ G. I. TAYLOR, Proc. Roy. Soc., Lond. A **145**, 362 [1934].

⁵ V. VOLTERRA, Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup., III. Ser. **24**, 401 [1907].

⁶ Ausführliche Darstellungen findet man in ^{7–9}.

⁷ A. SEEGER, Theorie der Gitterfehstellen, Handbuch d. Physik, Bd. VII/1, Springer-Verlag, Berlin 1955.

⁸ E. KRÖNER, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Springer-Verlag, Berlin 1958.

⁹ H. G. VAN BUREN, Imperfections in Crystals, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1961.

¹⁰ J. M. BURGERS, Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc. **42**, 293 [1939].

¹¹ J. S. KOEHLER, Phys. Rev. II. Ser. **60**, 397 [1941].

¹² G. LEIBFRIED u. K. LÜCKE, Z. Phys. **126**, 450 [1949].

¹³ J. D. ESHELBY u. A. N. STROH, Phil. Mag. **42**, 1401 [1951].

¹⁴ ELIZABETH H. YOFFE, Phil. Mag. **6**, 1147 [1961].

¹⁵ J. A. STEKETEE, Can. J. Phys. **36**, 192 [1958].



FRIED^{16, 17}, in der die Theorie der Versetzungen in Körpern mit freien Oberflächen ausführlich dargestellt wird. Wir benützen die dort angegebenen AIRY-Funktionen. Unsere Koordinaten und Bezeichnungen sind dieselben wie bei SEEGER⁷; sie stimmen im wesentlichen mit denen in der oben genannten Arbeit überein.

Leider ist die Berechnung des Verschiebungsfeldes einer Stufenversetzung in einer *Platte* außerordentlich verwickelt, da bereits die Berechnung der AIRY-Funktion auf Integrale führt, die nicht geschlossen berechnet werden können¹⁶. Dagegen kann das Problem einer parallel zur Oberfläche eines elastisch isotropen *Halbraums* verlaufenden Stufenversetzung geschlossen gelöst werden. Wie bereits in einer früheren Arbeit²⁰ bemerkt wurde, genügt es bei der Stufenversetzung nicht, dem Feld der betrachteten Versetzung das einer Bildversetzung hinzuzufügen, wie von anderen Autoren versuchsweise vorgeschlagen worden war. In den folgenden Abschnitten wird die angekündigte elastizitätstheoretisch konsequente Lösung vorgelegt.

Näherungsweise kann man das Verschiebungsfeld in einem Halbraum auch für eine Platte verwenden. Die Näherung ist um so besser, je näher die Versetzung bei der einen Oberfläche der Platte liegt, die dann die Rolle der Oberfläche des Halbraums spielt. Unter dem Blickwinkel einer systematischen Elastizitätstheorie der Stufenversetzung hat die Lösung für den Halbraum natürlich ihren selbständigen Wert.

1. Die Stufenversetzung mit Burgers-Vektor senkrecht zur Oberfläche

In einem elastisch isotropen Halbraum befindet sich eine geradlinige Stufenversetzung mit einem zur Oberfläche $x = 0$ senkrechten BURGERS-Vektor. Sie

und

$$v_1 = -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \ln \frac{(x-\xi)^2+y^2}{a^2} + \frac{(x-\xi)^2-y^2}{(x-\xi)^2+y^2} \right] \quad (5)$$

die Komponenten des Verschiebungsfeldes einer Stufenversetzung in einem unendlich ausgedehnten Körper (BURGERS¹⁰). a ist ein Abschneideradius, der im Verlaufe der Rechnung herausfallen wird. u_2 und v_2 stellen das Verschiebungsfeld der Bildversetzung dar, das man aus Gln. (3) und (4) durch Vorzeichenwechsel und Koordinatentransformation erhält:

$$u_2 = \frac{b}{2\pi} \left[-\operatorname{arctg} \frac{y}{(x+\xi)} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{(x+\xi)y}{(x+\xi)^2+y^2} \right], \quad (6)$$

¹⁶ H.-D. DIETZE u. G. LEIBFRIED, unveröffentlichtes Manuskript.

¹⁷ Einen kurzen Auszug aus dieser Arbeit findet man bei SEEGER⁷; siehe auch^{18, 19}.

¹⁸ H.-D. DIETZE, Diplomarbeit, Universität Göttingen 1949.

¹⁹ G. LEIBFRIED u. H.-D. DIETZE, Z. Phys. **126**, 790 [1949].

²⁰ W. PFEIFFER, phys. stat. sol. **3**, 145 [1963].

durchstoße die (x, y) -Ebene im Punkte $(x = \xi, y = 0)$ und verlaufe in z -Richtung (Abb. 1). Nach DIETZE und LEIBFRIED¹⁶ fügen wir eine Bildversetzung hinzu, welche die (x, y) -Ebene im Punkte $(x = -\xi, y = 0)$ durchstößt und die in der Oberfläche die Kompo-

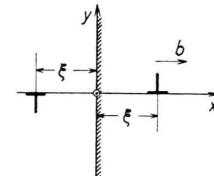


Abb. 1. Stufenversetzung mit BURGERS-Vektor in x -Richtung (senkrecht zur Grenzfläche). In allen Abbildungen ist rechts der mit Materie erfüllte Halbraum.

nente σ_{xx} des Spannungstensors der ursprünglichen Versetzung kompensiert. (Die Komponente σ_{yy} liefert in der Ebene $x = 0$ keine Kraft, beeinflußt also die Randbedingungen nicht.) Die verbleibende Schubspannung τ_{xy} kann dann durch eine Spannungsverteilung kompensiert werden, deren AIRY-Funktion

$$F^{(y)K} = -2B_1\xi xy/[(x+\xi)^2+y^2] \quad (1)$$

ist¹⁶. Dabei ist $B_1 = Gb/[2\pi(1-\nu)]$, G ist der Schubmodul, b der Betrag des BURGERS-Vektors, ν die Poissonsche Querkontraktionszahl²¹. Die Verschiebungskomponenten $u^{(y)}$ bzw. $v^{(y)}$ in x - bzw. y -Richtung lassen sich demnach aus drei Termen zusammenbauen²²:

$$u^{(y)} = u_1 + u_2 + u_3, \quad (2)$$

$$v^{(y)} = v_1 + v_2 + v_3. \quad (3)$$

Dabei sind

$$u_1 = \frac{b}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x-\xi} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{(x-\xi)y}{(x-\xi)^2+y^2} \right] \quad (4)$$

$$v_1 = \frac{(x-\xi)^2+y^2}{a^2} + \frac{(x-\xi)^2-y^2}{(x-\xi)^2+y^2} \quad (5)$$

²¹ Der Index (y) bezeichnet die Richtung der eingeschobenen Halbebene, K bedeutet Kompensation.

²² Wir lassen in Abschnitt 1 den Index (y) und in Abschnitt 2 den Index (x) bei den einzelnen Termen der Verschiebungen weg, da keine Verwechslungen zu befürchten sind.

$$v_2 = -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left[-(1-2\nu) \ln \frac{(x+\xi)^2+y^2}{a^2} - \frac{(x+\xi)^2-y^2}{(x+\xi)^2+y^2} \right]. \quad (7)$$

Die durch die AIRY-Funktion in Gl. (1) repräsentierte zusätzliche Spannungsverteilung ergibt Verschiebungskomponenten (u_3, v_3), die wir nun berechnen wollen.

Da jede AIRY-Funktion einer Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta F = 0 \quad (8)$$

genügt, kann sie nach GOURSAT²³, KOLOSSOFF²⁴ und MUSCHELIŠVILI²⁵ durch analytische Funktionen φ und ψ dargestellt werden, aus denen sich die Komponenten des Verschiebungsfeldes berechnen lassen²⁶.

Findet man nämlich eine Darstellung

$$F = \operatorname{Re}[\bar{a}\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)] \quad \text{mit} \quad \alpha = x + iy \quad \text{und} \quad \bar{a} = x - iy, \quad (9)$$

$$\text{so ist } u_3 = -\frac{1}{2G} \operatorname{Re}[\psi'(\alpha) + \bar{a}\varphi'(\alpha) - (3-4\nu)\varphi(\alpha)] - \varepsilon y + \beta \quad (10)$$

$$\text{und } v_3 = -\frac{1}{2G} \operatorname{Re}\{i[\psi'(\alpha) + \bar{a}\varphi'(\alpha) + (3-4\nu)\varphi(\alpha)]\} + \varepsilon y + \beta'. \quad (11)$$

ε, β und β' sind beliebige reelle Konstanten, die in unserem Falle am besten alle gleich null gesetzt werden, wie in Abschnitt 5 dargelegt werden wird.

Zur Berechnung von φ und ψ gehen wir von der leicht zu prüfenden Identität

$$\frac{1}{\alpha+\xi} = \frac{\bar{\alpha}+\xi}{(x+\xi)^2+y^2} \quad (12)$$

aus. Die rechte Seite dieser Gleichung besitzt bereits denselben Nenner wie $F^{(y)K}$ in Gl. (1). Wir multiplizieren mit einer zunächst noch unbekannten Funktion $f(\alpha, \bar{\alpha})$ durch und bilden den Realteil:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(\alpha, \bar{\alpha})}{\alpha+\xi}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{f(\alpha, \bar{\alpha}) \cdot (\bar{\alpha}+\xi)}{(x+\xi)^2+y^2}\right]. \quad (13)$$

f ist so zu bestimmen, daß in Gl. (13) rechts $F^{(y)K}$ steht und daß links ein Ausdruck von der durch Gl. (9) gegebenen Form steht. Wir verlangen also zunächst

$$F^{(y)K} = \frac{-2B_1\xi xy}{(x+\xi)^2+y^2} = \operatorname{Re}\left[\frac{f(\alpha, \bar{\alpha}) \cdot (\bar{\alpha}+\xi)}{(x+\xi)^2+y^2}\right]. \quad (14)$$

Der Faktor xy kommt in den Imaginärteilen von

$\alpha(\bar{\alpha}+\xi)$ und $\bar{\alpha}(\bar{\alpha}+\xi)$ vor, wenn man x und $(x+\xi)$ als unabhängige Größen behandelt. Wir setzen deshalb für eine mit i multiplizierte Linearkombination von α und $\bar{\alpha}$ an:

$$f = i(p\alpha + q\bar{\alpha}). \quad (15)$$

Aus Gl. (14) und (15) erhält man leicht

$$p = q = -B_1\xi. \quad (16)$$

Also ist

$$f = -iB_1\xi(\alpha + \bar{\alpha}). \quad (15a)$$

Somit wird aus der linken Seite von Gl. (13):

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(\alpha, \bar{\alpha})}{\alpha+\xi}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{-iB_1\xi(\alpha + \bar{\alpha})}{\alpha+\xi}\right]. \quad (17)$$

Durch Vergleich mit Gl. (9) erhält man

$$\varphi = -iB_1\xi/(\alpha + \xi) \quad (18)$$

$$\text{und} \quad \psi = -iB_1\xi\alpha/(\alpha + \xi). \quad (19)$$

Die Ableitungen sind

$$\varphi' = d\varphi/d\alpha = iB_1\xi/(\alpha + \xi)^2 \quad (18a)$$

$$\text{und} \quad \psi' = d\psi/d\alpha = -iB_1\xi^2/(\alpha + \xi)^2. \quad (19a)$$

Setzt man die Ausdrücke aus den letzten vier Gleichungen in die Gln. (10) und (11) ein, so erhält man

$$u_3 = \frac{-B_1\xi y}{G[(x+\xi)^2+y^2]^2} \{[(x+\xi)^2+y^2] (1-2\nu) + 2x(x+\xi)\} \quad (20)$$

$$\text{und} \quad v_3 = \frac{-B_1\xi}{G[(x+\xi)^2+y^2]^2} \{[(x+\xi)^2+y^2] [(1-2\nu)(x+\xi) + \xi] + 2xy^2\}. \quad (21)$$

²³ M. GOURSAT, Bull. Soc. Math. France **26**, 236 [1898].

²⁴ G. KOLOSSOFF, Z. Math. Phys. **62**, 384 [1914].

²⁵ N. MUSCHELIŠVILI, Math. Ann. **107**, 282 [1933].

²⁶ Formeln, Beweise und Betrachtungen über Eindeutigkeitsfragen usw. findet man z. B. in dem Lehrbuch²⁷.

²⁷ I. BABUŠKA, K. REKTORYS u. F. VYCICHLO, Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme, Akademie-Verlag, Berlin 1960.

Insgesamt wird $u^{(y)} = u_1 + u_2 + u_3$

$$= \frac{b}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{2\xi y}{x^2+y^2-\xi^2} + \frac{y}{2(1-\nu)} \left(\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+y^2} - \frac{x+\xi}{(x+\xi)^2+y^2} \right) \right]$$

$$- \frac{b\xi y}{2\pi(1-\nu)[(x+\xi)^2+y^2]^2} \{ [(x+\xi)^2+y^2] (1-2\nu) + 2x(x+\xi) \} \quad (22)$$

und

$$v^{(y)} = v_1 + v_2 + v_3$$

$$= -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \ln \frac{(x-\xi)^2+y^2}{(x+\xi)^2+y^2} + \frac{(x-\xi)^2-y^2}{(x-\xi)^2+y^2} - \frac{(x+\xi)^2-y^2}{(x+\xi)^2+y^2} \right]$$

$$- \frac{b\xi}{2\pi(1-\nu)[(x+\xi)^2+y^2]^2} \{ [(x+\xi)^2+y^2] [(1-2\nu)(x+\xi)+\xi] + 2xy^2 \}. \quad (23)$$

2. Die Stufenversetzung mit Burgers-Vektor parallel zur Oberfläche

Die Rechnung für den Fall einer Stufenversetzung mit zur Oberfläche parallelem BURGERS-Vektor (Abb. 2) verläuft analog. In diesem Fall ist

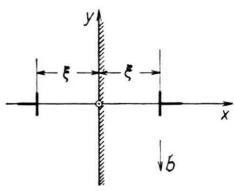


Abb. 2. Stufenversetzung mit BURGERS-Vektor in y -Richtung (parallel zur Grenzfläche).

$$u_1 = -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \ln \frac{(x-\xi)^2+y^2}{a^2} - \frac{(x-\xi)^2-y^2}{(x-\xi)^2+y^2} \right], \quad (24)$$

$$v_1 = -\frac{b}{2\pi} \left[-\operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{y} - \frac{1}{2(1-\nu)} \cdot \frac{(x-\xi)y}{(x-\xi)^2+y^2} \right]. \quad (25)$$

Außerdem ist

$$u_2 = -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left[-(1-2\nu) \ln \frac{(x+\xi)^2+y^2}{a^2} + \frac{(x+\xi)^2-y^2}{(x+\xi)^2+y^2} \right], \quad (26)$$

$$v_2 = -\frac{b}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{x+\xi}{y} + \frac{1}{2(1-\nu)} \cdot \frac{(x+\xi)y}{(x+\xi)^2+y^2} \right]. \quad (27)$$

Die AIRY-Funktion für die zur Kompensation der verbleibenden Spannung σ_{xx} nötige Spannungsverteilung ist nach DIETZE und LEIBFRIED¹⁶

$$F^{(x)K} = -B_1 \xi \left\{ \ln [(x+\xi)^2+y^2] + \frac{2x(x+\xi)}{(x+\xi)^2+y^2} \right\}. \quad (28)$$

Die komplexe Darstellung des logarithmischen Gliedes erhält man leicht mit dem Ansatz

$$\ln [(x+\xi)^2+y^2] = \text{const} \cdot \operatorname{Re}[\ln(\alpha+\xi)]. \quad (29)$$

Nach einiger Rechnung bekommt man

$$\varphi = B_1 \xi / (\alpha + \xi); \quad \varphi' = -B_1 \xi / (\alpha + \xi)^2; \quad (30)$$

$$\psi = -2B_1 \xi \ln(\alpha + \xi) + B_1 \xi \alpha / (\alpha + \xi); \quad \psi' = -2B_1 \xi / (\alpha + \xi) + B_1 \xi^2 / (\alpha + \xi)^2. \quad (31)$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gln. (10) und (11) ein, so findet man

$$u_3 = \frac{B_1 \xi}{G[(x+\xi)^2+y^2]^2} \{ [(x+\xi)^2+y^2] [2(1-\nu)(x+\xi)+x] - 2xy^2 \}, \quad (32)$$

$$v_3 = \frac{B_1 \xi y}{G[(x+\xi)^2+y^2]^2} \{ [(x+\xi)^2+y^2] 2\nu + (x^2-y^2-\xi^2) \}. \quad (33)$$

Die gesamten Verschiebungskomponenten $u^{(x)}$ und $v^{(x)}$ berechnet man wieder als Summe der zusammengehörenden Terme:

$$u^{(x)} = -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \ln \frac{(x-\xi)^2+y^2}{(x+\xi)^2+y^2} - \frac{(x-\xi)^2-y^2}{(x-\xi)^2+y^2} + \frac{(x+\xi)^2-y^2}{(x+\xi)^2+y^2} \right]$$

$$+ \frac{b\xi}{2\pi(1-\nu)[(x+\xi)^2+y^2]^2} \{ [(x+\xi)^2+y^2] [2(1-\nu)(x+\xi)+x] - 2xy^2 \}, \quad (34)$$

$$v^{(x)} = -\frac{b}{2\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{2\xi y}{x^2+y^2-\xi^2} + \frac{y}{2(1-\nu)} \left[\frac{(x+\xi)}{(x+\xi)^2+y^2} - \frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2+y^2} \right] \right\} + \frac{B_1 \xi y}{G[(x+\xi)^2+y^2]^2} \{ [(x+\xi)^2+y^2] 2\nu + (x^2-y^2-\xi^2) \}. \quad (35)$$

3. Die Stufenversetzung mit beliebig in der $(x y)$ -Ebene orientiertem Burgers-Vektor

Wir betrachten wieder eine parallel zur Oberfläche verlaufende Versetzung. Der Winkel zwischen der x -Achse und einer in die eingeschobene Halbebene zeigenden Gleitebenennormalen sei ϑ (Abb. 3). Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie kann man die AIRY-Funktion für dieses Problem nach DIETZE und LEIBFRIED¹⁶ folgendermaßen darstellen:

$$F = F^{(x)} \cos \vartheta + F^{(y)} \sin \vartheta. \quad (36)$$

Dabei sind

$$F^{(x)} = F^{(x)V} + F^{(x)B} + F^{(x)K}$$

und

$$F^{(y)} = F^{(y)V} + F^{(y)B} + F^{(y)K}$$

die AIRY-Funktionen für das *Gesamtproblem* einer Stufenversetzung mit parallel bzw. senkrecht zur Oberfläche verlaufendem BURGERS-Vektor²⁸.

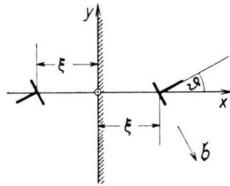


Abb. 3. Stufenversetzung mit beliebig in der (xy) -Ebene gelegtem BURGERS-Vektor.

Für die Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen gelten analoge Formeln. Insbesondere besitzt das Verschiebungsfeld der in Abb. 3 skizzierten Versetzung die Komponenten

$$u = u^{(x)} \cos \vartheta + u^{(y)} \sin \vartheta, \quad (37)$$

$$v = v^{(x)} \cos \vartheta + v^{(y)} \sin \vartheta. \quad (38)$$

Die Formeln für $u^{(x)}$ usw. sind aus den Gln. (22), (23), (34) und (35) zu entnehmen. Man kann dies als Überlagerung zweier Stufenversetzungen mit den BURGERS-Vektoren $b \cdot \cos \vartheta$ (in y -Richtung) und $b \cdot \sin \vartheta$ (in x -Richtung) betrachten.

4. Die Versetzung mit beliebigem Burgers-Vektor

Wir wollen noch kurz eine Versetzung mit einem BURGERS-Vektor \mathfrak{B} betrachten, der eine Schraubenkomponente b_s besitzt. Um den Anschluß an die For-

meln der bisherigen Abschnitte zu behalten, nennen wir den Betrag der Projektion von \mathfrak{B} in die (xy) -Ebene „ b “. Dann sind die Komponenten von \mathfrak{B} in x -, y - bzw. z -Richtung $b \cdot \sin \vartheta$, $b \cdot \cos \vartheta$ bzw. b_s . Zu den in Abschnitt 3 behandelten Komponenten des Verschiebungsfeldes kommt dann noch eine z -Komponente w hinzu, die man berechnet, als habe man eine reine Schraubenversetzung mit der Versetzungsstärke b_s vor sich. Nach DIETZE und LEIBFRIED¹⁶ ist

$$w = -\frac{b_s}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x+\xi}{y} \right). \quad (39)$$

Die beiden Terme berücksichtigen die wirkliche Schraubenversetzung (Rechtsschraube) und ihre Bildversetzung. Wie man leicht nachrechnet, erhält man mit dieser einfachen Anordnung bereits eine spannungsfreie Oberfläche.

Damit ist das Problem des Verschiebungsfeldes einer parallel zur Oberfläche eines elastisch isotropen Halbraums verlaufenden Versetzung beliebigen Charakters im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie in voller Allgemeinheit gelöst. Natürlich lassen sich die Komponenten des Spannungstensors in der bekannten Weise als zweite Ableitungen der AIRY-Funktion berechnen. Die Ergebnisse findet man bei DIETZE und LEIBFRIED¹⁶. Die Verzerrungen können hieraus nach dem verallgemeinerten HOOKESchen Gesetz berechnet werden.

5. Wahl der Konstanten β , β' und ε ; Diskussion der Symmetrieverhältnisse

Wie z. B. von BABUŠKA et al.²⁷ hervorgehoben wird, sind u und v bei gegebener AIRY-Funktion nur bis auf einen Term $(-\varepsilon y + \beta)$ bzw. $(\varepsilon x + \beta')$ bestimmt. ε , β und β' sind in mathematischer Hinsicht beliebige Konstanten. Sie sind in physikalisch sinnvoller Weise zu wählen.

Durch β und β' ist eine Translation des gesamten Körpers ohne Verzerrung gegeben. Es ist also am sinnvollsten, $\beta = \beta' = 0$ zu setzen.

Die Glieder εx und $-\varepsilon y$ divergieren, während alle übrigen Terme des Verschiebungsfeldes in gro-

²⁸ Die oberen Indizes V, B und K bedeuten der Reihe nach „Versetzung“, „Bildversetzung“ und „Kompensation“ der in der Oberfläche verbliebenen Spannungen.

ßen Entfernungen von der Versetzung entweder gegen kleine feste Werte streben oder verschwinden. Man wird also zur Vermeidung einer Divergenz $\varepsilon = 0$ setzen.

In diesem Zusammenhang ist es interessant, daß die im unendlichen Körper für große x oder y auftretende logarithmische Divergenz von $u^{(x)}$ und $v^{(y)}$ im Halbraum verschwindet, da das Argument des Logarithmus in Gln. (23) und (34) für große x oder y gegen 1 strebt. Dagegen bleibt die logarithmische Divergenz in der Nähe des Versetzungskernes erhalten.

Es erhebt sich nun die Frage, wie die Symmetrieeigenschaften durch die Wahl von ε beeinflußt werden. Im Falle eines in x -Richtung verlaufenden BURGERS-Vektors ist in einem unendlich ausgedehnten Körper u antisymmetrisch und v symmetrisch zur eingeschobenen Halbebene. Die Detailrechnung zeigt, daß es nach Einführung einer Oberfläche nicht möglich ist, durch geeignete Wahl von ε eine dieser Eigenschaften zu retten. Es gibt auch keinen Wert von ε , für den bei $x = \xi$ $u = \text{const.}(y)$ wird. Das heißt, in einem Halbraum ist die eingeschobene Halb- „Ebene“ keine Ebene im mathematischen Sinne. Dagegen ist v wie in einem unendlich ausgedehnten Körper symmetrisch in y , wenn man $\varepsilon = 0$ wählt. Das heißt, v hat dann denselben Wert in gleichen Entfernungen zu beiden Seiten der Gleitebene.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei einer Versetzung mit BURGERS-Vektor in y -Richtung. Allerdings bleibt in diesem Fall die eingeschobene Ebene eine wirkliche Ebene. Dagegen geht die Symmetrie bezüglich der Gleitebene unabhängig von ε verloren.

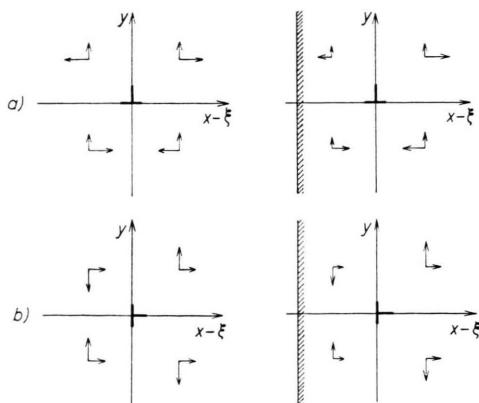


Abb. 4. Schematische Darstellung der Symmetrien des Verschiebungsfeldes. Die Pfeile in x - bzw. y -Richtung repräsentieren die Komponenten u bzw. v des Verschiebungsfeldes. Links: Versetzung im unendlich ausgedehnten Raum. Rechts: Versetzung im Halbraum. a) $u^{(y)}$ und $v^{(y)}$; b) $u^{(x)}$ und $v^{(x)}$.

Die folgende Liste und Abb. 4 geben einen Überblick darüber, wie sich die Symmetrieverhältnisse beim Übergang von einem unendlichen Körper zu einem Halbraum ändern. „+“ bzw. „-“ bedeutet, daß die links erwähnte Symmetrieeigenschaft besteht bzw. nicht besteht.

a) BURGERS-Vektor senkrecht zur Oberfläche des Halbraums (Abb. 1 und 4 a)

	Unendlicher Raum	Halbraum
$u^{(y)}$ antisymmetrisch in $(x - \xi)$	+	-
$u^{(y)}$ antisymmetrisch in y	+	+
$v^{(y)}$ symmetrisch in $(x - \xi)$	+	-
$v^{(y)}$ symmetrisch in y	+	+

b) BURGERS-Vektor parallel zur Oberfläche des Halbraums (Abb. 2 und 4 b)

	Unendlicher Raum	Halbraum
$u^{(x)}$ symmetrisch in $(x - \xi)$	+	-
$u^{(x)}$ symmetrisch in y	+	+
$v^{(x)}$ antisymmetrisch in $(x - \xi)$	+	-
$v^{(x)}$ antisymmetrisch in y	+	+

Wie man erkennt, verliert das Verschiebungsfeld durch die Einführung einer Oberfläche einen wesentlichen Teil seiner Symmetrieeigenschaften. Ganz wie man erwartet, gehen alle Symmetrien in der zur Grenzfläche senkrechten Koordinate verloren.

c) Beliebig orientierter BURGERS-Vektor

Eine genaue Diskussion der Symmetrien wäre in diesem Fall erheblich mühsamer. Man müßte das Koordinatensystem um den Winkel ϑ drehen und die Symmetrien in diesen neuen Koordinaten betrachten. Es scheint jedoch auch ohne Rechnung plausibel, daß alle Symmetrien der in Abschnitten a) und b) erwähnten Art verloren gehen, da die Oberfläche zu keiner der beiden Symmetrie- bzw. Antisymmetrieebenen des Verschiebungsfeldes einer im unendlichen Raum liegenden Versetzung parallel ist.

6. Elektronenbeugungskontrast von Versetzungen in begrenzten Medien

Bei der elektronenmikroskopischen Durchstrahlung dünner Metallfolien können Versetzungen sicht-

bar werden^{29, 30}. Zur Berechnung des Kontrastes benötigt man das elastische Verschiebungsfeld dieses Gitterfehlers¹. In den meisten bisher erschienenen Arbeiten über das Kontrastproblem wurde das Verschiebungsfeld einer in einem unendlich ausgedehnten Körper liegenden Versetzung verwendet. Offensichtlich ist das für die in der Elektronenmikroskopie verwendeten Folien von etwa 10^3 Å Dicke keine besonders gute Näherung. Ein dem Problem angemessener Modellkörper ist eine dünne Platte. Wir beabsichtigen, das zugeordnete Kontrastproblem für eine *Schraubenversetzung* in einer späteren Arbeit zu behandeln.

Die *Stufenversetzung* in einer Platte bereitet, wie wir einleitend erwähnt haben, beträchtliche mathematische Schwierigkeiten. Es liegt deshalb nahe, das Verschiebungsfeld für den Halbraum als Näherung zu verwenden und nur Versetzungen zu betrachten, die nicht in Folienmitte liegen.

Das in dieser Arbeit berechnete Verschiebungsfeld wurde in die kinematische Theorie der Elektronenbeugung eingeführt. Die auf diese Weise berechneten Kontrastkurven werden demnächst an an-

derer Stelle veröffentlicht werden. Wir wollen hier bereits mitteilen, daß diese Kurven den bereits veröffentlichten Kurven²⁰ ähnlich sind, die mit dem Verschiebungsfeld für einen unendlich ausgedehnten Körper berechnet wurden. Man findet wieder Kurven mit zwei oder vier Schwärzungssmaxima. Lage und Höhe der Maxima sind leicht modifiziert. Legt man die Versetzung sehr nahe an die Grenzfläche, so erhält man drei Maxima. Zusammen mit den alten Kurven²⁰ hat man nunmehr für praktisch alle in elektronenmikroskopischen Aufnahmen von Versetzungsringen in Zink vorkommenden Kontrastkonfigurationen eine Deutung mit Hilfe der verhältnismäßig einfachen und anschaulichen kinematischen Theorie.

Herrn Prof. Dr. F. R. BROTZEN, Rice University, Houston, danke ich sehr herzlich für die verständnisvolle Förderung dieser Arbeit. Den Herren Prof. Dr. J. M. ROBERTS, Houston, und Dr. G. SCHOTTKY, Stuttgart, habe ich für aufschlußreiche Diskussionen zu danken. Herrn J. HUDSON, B. A., Houston, danke ich für seine Hilfe bei umfangreichen Kontrollrechnungen. Ganz besonderen Dank schulde ich Herrn Dozent Dr. H.-D. DIETZE, Aachen, der mir ein Exemplar des in Fußnote¹⁶ erwähnten Manuskriptes zur Verfügung gestellt hat.

Der National Aeronautics and Space Administration (NASA) gebührt Dank für finanzielle Unterstützung (Grant NsG-6-59).

²⁹ W. BOLLMANN, *Phys. Rev.* **103**, 1588 [1956].

³⁰ P. B. HIRSCH, R. W. HORNE u. M. J. WHELAN, *Phil. Mag.* **1**, 677 [1956].